|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра прикладной математики | | |
| Курсовой проект | | |
| по дисциплине «Уравнения математической физики» | | |
|  | | |
|  | | |
|  |  |  |
| Группа ПМ-92 | Артюхов Роман |
| Вариант 22, 6 |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| Преподаватели | Соловейчик Юрий Григорьевич |
|  | Патрушев илья игоревич |
| Новосибирск, 2022 | | |

Задача (вариант 22, 6):

(Вариант 22) МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

(Вариант 6) Решить с помощью МКЭ двумерную гиперболическую задачу в декартовых координатах. Неявная трехслойная схема по времени.

1. Постановка задачи

Уравнение гиперболического типа имеет следующий вид:



Уравнение заданно в некоторой области  с границей  и краевыми условиями:



В декартовой системе координат это уравнение может быть записано в виде:



1. Теоретическая часть
   1. Дискретизация по времени

Представим искомое решение  на интервале в следующем виде:







Функции  — это базисные квадратичные полиномы Лагранжа, которые могут быть записаны в виде:



Применим представление (2) для аппроксимации производной по времени гиперболического уравнения (1) на временном слое 

Сначала вычислим производные по t функций при 



Подставляем в уравнение (1):



Переносим все известные компоненты в правую часть:



Для удобства заменим:





Получим:



* 1. Вариационная постановка

Выполняем вариационную постановку методом Галёркина.

В общем виде постановка Галёркина для операторного уравнения  записывается в следующем виде:



Где 



Применяя формулу Грина и учитывая краевые, перепишем уравнение в виде:



Исходя из того, что  перепишем уравнение в виде:



Исходная задача рассматривается в декартовой системе координат, то





Отсюда получаем уравнение в виде:



* 1. Конечноэлементная дискретизация

На каждом конечном элементе  - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями , такими, что 

Любая линейная на, функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника. Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся 3 узла – вершины треугольника.

Получаем:



При вычислении интегралов от произведений вида по треугольнику или по любому его ребру можно использовать формулы:



где  — это площадь треугольника

- матрица координат его вершин.

Учитывая построение - функций, получаем следующие соотношения:



Получаем систему:



Находим коэффициенты линейных функций







* 1. Переход к локальным матрицам

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости G и массы M каждого конечного элемента , перейдем к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области представим в виде суммы интегралов по областям без учёта краевых условий.



Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность 3x3.

* + 1. Построение матрицы жёсткости

Рассмотрим первый член в вышеуказанном выражении для k-го конечного элемента:



Учитывая, что , получаем:



В поставленной задаче требуется разложить  по квадратичным базисным функциям: , где – значение коэффициента  в соответствующих узлах, - квадратичные базисные функции, которые определяются следующим образом:



Таким образом, 

Интегралы от базисных функций равны:





Учитывая интегралы получим:



Где - сумма значений коэффициента на серединах трех сторон конечного элемента.

* + 1. Построение матрицы массы

Рассмотрим второй член в выражении для k-го конечного элемента:



Учитывая, что , получаем:



* + 1. Построение вектора правой части

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:



можно представить в виде:

 - значение в вершинах треугольника.



Получим:





В матричном виде (1) будет выглядеть:



1. Метод решение СЛАУ

Локально-оптимальная схема с диагональным предобуславливанием матрицы